

יציבות וביצועים רובוסטיים של מערכות הנדסיות בתנאי אי-ודאות

פרופ' עזרא זאב

מבוא

האנליזה של כל מערכת הנדסית, כמו גם התכן (design) של מערכת הנדסית, מבוססים על מודל מתימטי שאמור לתאר ולייצג את המערכת. ככל שנדרש דיוק יותר גדול, כך המודל המתימטי הוא יותר מסובך, והאנליזה והתכן נעשים יותר מסורבלים וקשים לביצוע, עד למקרה הקיצוני של אי יכולת מעשית לבצע את האנליזה או התכן. אולם, גם אם מנסים לבנות את המודל המתימטי המדויק ביותר, אף פעם המודל המתימטי אינו מתאר במדויק את המערכת ההנדסית האמיתית. ראשית, תמיד יש במודל המתימטי דינמיקות חסרות. שנית, הפרמטרים הפיסיקליים במערכת המציאותית אינם בעלי ערך זהה לזה שנלקח בחשבון במודל המתימטי, עקב טולרנציות של היצור. שלישית, גם אם נצא מהנחה תיאורטית (בלתי מציאותית) שהמודל המתימטי מתאר בצורה מדויקת לחלוטין את המערכת ההנדסית המציאותית ברגע מסוים, הרי ששינויים בטמפרטורה ובלחות, שינויים אטמוספיריים, התעייפות החומר וכיוצא באלו דברים, משנים את הערך של הפרמטרים הפיסיקליים במערכת המציאותית. לעיתים ההבדלים בין התנהגות המודל המתימטי והתנהגות המערכת האמיתית הם קטנים וניתנים להזנחה, ולעיתים ההבדלים גדולים ביחס למטרת האנליזה או התכן, והזנחה שלהם תביא לשגיאות גדולות עד כדי חוסר ערך מוחלט לאנליזה או התכן שנעשו. אין לי ספק שעובדות אלו, דהיינו ההבדל בין מודל מתימטי ומערכת הנדסית מציאותית, אינן מפתיעות את קוראי כתב העת "חשמל ואנשים", שהם ברובם הגדול מהנדסים. במאמר זה אתאר בקצרה שטח מחקר חדש יחסית, המתרכז בשיטות דטרמיניסטיות לאנליזה ותכן של מערכות הנדסיות על ידי מודלים מתימטיים שבהם לא מניחים שידוע הערך המדויק של פרמטרים פיסיקליים כגון מתח, זרם, ערך של קבל או נגד, הגבר של מגבר, מסה, חכוך וכו', אלא מניחים שערכם נמצא באינטרבל נתון, לדוגמה המתח הוא בין 110V ל-130V או ערך הקבל הוא בין $0.9\mu F$ ובין $1.1\mu F$. אמנם הפער שבין שיטות חדשניות אלו ובין השימוש בהן על ידי מהנדסים "בשטח" הוא עדיין גדול, אבל בשנים האחרונות פער זה הולך ומצטמצם ואני תקווה שהפער יסגר כליל "במהרה בימינו".

יציבות מערכת הנדסית בהנחה של מודל קבוע ללא אי-ודאות

הבעיה הראשונה במערכת הנדסית, לפני שמדובר בביצועי המערכת, היא שמירה על יציבות המערכת.

אם בעבר ההנחה היתה שהמודל המתימטי כולל פרמטרים שערכם קבוע ונתון בדיוק (לא באינטרבל נתון), אזי פתרון בעיית היציבות ידוע כבר למעלה מ-100 שנים. לגבי מערכת רציפה בזמן (לינארית וקבועה בזמן), שם הדרישה ליציבות היא שהקטבים של פונקציית התמסורת, או לחילופין, הערכים העצמיים של מטריצת המצב, ימצאו בחצי המישור הקומפלכסי השמאלי הפתוח, ניתנו לפני כ-100 שנה ארבעה פתרונות בלתי תלויים המצריכים בסך הכל מספר סופי של פעולות אלגבריות אלמנטריות. הפתרון הראשון ניתן על ידי [1] (1822 – 1901) Charles Hermite. פתרונות נוספים ניתנו על ידי [2] (1831 – 1907) Edward John Routh, [3] (1857 – 1918) Aleksander Mikhailovich Lyapunov ו-[4] (1859 – 1919) Adolf Hurwitz. בדרך כלל משתמשים בקריטריון הנקרא על שם ראוט והורביץ ביחד: Routh-Hurwitz Theorem.

כאתנחתא קלה בקריאת המאמר, מעניין לספר כיצד, לפי השמועה, פרסם Routh את התוצאה שלו בעניין הקריטריון ליציבות. John Routh ו-James Clerk Maxwell למדו באותו מחזור באוניברסיטת קיימברידג' באנגליה. שניהם היו סטודנטים מצטיינים והתחרו ביניהם על הבכורה. Routh זכה במקום הראשון במחזור ואילו Maxwell הגיע שני. אולם, התחרות ביניהם לא פסקה. גם מקסוול פרסם פתרונות חלקיים לבעיית היציבות אולם, שלא כמו בתורה האלקטרו-מגנטית שלו, לא הגיע לפתרון כללי של הבעיה. כאשר ראוט הציג את הפתרון שלו בכנס מדעי, הוא פתח ואמר:

"I Heard that my friend Clerk Maxwell had some difficulties in a rather simple problem. Here is the complete solution ..."

הבעיה המקבילה, של קריטריון להמצאות אפסי פולינום בתוך עגול היחידה, דרישה המבטיחה יציבות של מערכת דיסקרטית בזמן (לינארית וקבועה בזמן או בהזזה), נפתרה גם היא לפני זמן רב. ישנם מספר קריטריונים כנ"ל, אשר הנפוצים שבהם הם הקריטריונים של Issai Schur (1875 – 1941) [5] (נפטר בתל-אביב כניצול שואה) ו-Eli Jury [6] (יב"א (בוגר הטכניון, מחזור 1946)).

(1) אמנם הרמיט לא טיפל בבעיית היציבות, אבל נתן קריטריון להמצאות אפסי פולינום נתון בחצי המישור הקומפלכסי העליון. קריטריון זה ניתן בקלות להתאים, על ידי טרנספורמציה פשוטה, לקריטריון של המצאות כל אפסי פולינום נתון בחצי המישור הקומפלכסי השמאלי.

”קטן-קטן“. המקדמים הבאים בכל פולינום שומרים על מחזוריות של שני מקדמי קצה גדולים, שני מקדמי קצה קטנים. הנקודה המפתיעה במשפט זה, הייתי אומר אפילו אנטי-אינטואיטיבית, היא שהמספר 4 (פולינומים) אינו תלוי בדרגת הפולינום n . יכולים להיות מיליון פרמטרים אינטרביים ובכל זאת ארבע פולינומים בלבד מבטיחים את היציבות של כל משפחת הפולינומים האינטרביים.

יציבות וביצועים רובוסטיים בתנאי אי-ודאות

מאידך, אם כי המשפט של חריטונוב הוא סמינלי ופתח שטח מחקר חדש והוא מצוטט על ידי אלפי או עשרות אלפי מאמרים, החשיבות המעשית שלו לגבי מערכות הנדסיות ריאליות היא לא גבוהה. שתי הסיבות העיקריות לכך הן:

1. מקדמי הפולינום הקרקטריסטי של מערכות כנ”ל, אשר מיקום אפסיו קובע את יציבות המערכת, הינם פונקציות של פרמטרים פיסיקליים אינטרביים, כגון מתח, זרם, חכוך, מסה וכו’ אשר על כן, המקדמים אינם בלתי תלויים והפולינום אינו מן המשפחה (2) – (1). אמנם אפשר לחשב את הקובייה הרב ממדית החוסמת של המקדמים, מתוך ידיעת האינטרבלים של הפרמטרים הפיסיקליים, ואז לקבל פולינום אינטרבי מן המשפחה (2) – (1). אולם התוצאות במקרה זה נותנות רק תנאי מספיק ולא הכרחי, אשר יכול להיות שמרני מאוד.
2. המשפט של חריטונוב הוכח עבור הצטברות של אפסי פולינום באזור שהוא חצי מישור קומפלכסי, מה שמתאים להבטחת יציבות של מערכת ליניארית רציפה בזמן. היום יודעים שהמשפט רלבנטי גם להצטברות אפסים באזורים מסוימים אחרים של המישור הקומפלכסי. אולם המשפט בודאות אינו רלבנטי עבור כל אזור שהוא במישור הקומפלכסי. לדוגמא, עבור יציבות של מערכות ליניאריות דיסקרטיות בזמן נחוץ שכל אפסי הפולינום הקרקטריסטי ימצאו בעגול היחידה. דוקא לאזור חשוב זה, עגול היחידה, משפט חריטונוב אינו רלבנטי, כפי שהראו לראשונה בוסה וזאב [8]. ניקח לדוגמא מערכת ספרתית (דיסקרטית בזמן) המורכבת ממכפלים, מסכמים ויחידות השהיה, ומאופיינת על ידי פונקצית התמסורת הבאה:

$$G(z) = \frac{1 + 2\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4}}{a\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z^4}} = \frac{z^4 + 2z^3 + z^2 - 1}{az^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3}}$$

ערכו של הפרמטר a אינו ידוע בוודאות, אולם הוא נמצא באינטרבל

$$-\frac{33}{8} \leq a \leq \frac{1}{8}$$

יציבות רובוסטית של מערכת הנדסית מציאותית

דא עקא, כפי שכבר ציינו, אין זה ריאלי לגבי מערכות הנדסיות מציאותיות להניח מקדמים קבועים של הפולינום הקרקטריסטי אשר אפסיו הם קטבי פונקציית התמסורת או הערכים העצמיים של מטריצת המצב. כלומר, הבעיה העומדת לפנינו היא הבעיה הבאה: נתון פולינום $P(s)$ במשתנה הקומפלכסי s , אשר מקדמיו אינם ידועים באופן מדויק, אבל ידועים האינטרבלים שבהם נמצאים המקדמים.

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i} = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (1)$$

$$\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

כאשר $\bar{a}_i \geq \underline{a}_i$ הם מספרים ממשיים נתונים.

לגבי מערכת ליניארית רציפה בזמן, קבע האם

$$P(s) \neq 0 \quad \text{in} \quad \text{Re}[s] \geq 0 \quad (3)$$

עבור כל ערך של a_i בתחום (2).

לגבי מערכת ליניארית בדידה בזמן, קבע האם

$$P(s) \neq 0 \quad \text{in} \quad |s| \geq 1$$

עבור כל ערך של a_i בתחום (2).

בעיה זו מאלצת אותנו לטפל במשפחה אין-סופית של פולינומים. לא זו בלבד שזו בעיה אנליטית קשה, אלא שאפילו שימוש במחשב ופתרון נומרי מקורב, אינו אפשרי במקרה אין-סופי זה.

לא מזמן, נפתרה גם בעיה זו, לגבי מערכת רציפה בזמן, באופן אלגנטי ומפתיע על ידי מתימטיקאי רוסי בשם ולדימיר חריטונוב [7]. המשפט ”החלש” שלו הוא די אינטואיטיבי. חריטונוב הוכיח כי אם, ורק אם, כל ”פולינומי הקצה” הם יציבים (אפסיהם נמצאים בחצי המישור הקומפלכסי השמאלי הפתוח), אזי כל המשפחה האין-סופית של הפולינומים האינטרביים (2) – (1) היא יציבה. במונח ”פולינומי קצה” הכוונה היא להצבת כל אפשרויות ערכי הקצה:

$$a_i = \underline{a}_i \quad \text{או} \quad a_i = \bar{a}_i \quad i \in \{0, \dots, n\}$$

אם דרגת הפולינום היא n אזי ברור שישנם 2^{n+1} פולינומי קצה, ועבור n גדול מספר פולינומי הקצה יכול להיות גדול מאוד.

אולם, ישנו גם המשפט ”החזק” של חריטונוב. במשפט מפתיע זה הוכיח חריטונוב כי מספיק, וכמובן הכרחי, שארבעת הפולינומים הבאים יהיו יציבים, כדי שכל המשפחה האין-סופית של הפולינומים האינטרביים (2) – (1) תהיה יציבה.

ארבעה הפולינומים הם:

$$P_1(s) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} s + \underline{a}_{n-2} s^2 + \underline{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-4} s^4 \dots$$

$$P_2(s) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1} s + \underline{a}_{n-2} s^2 + \bar{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-4} s^4 \dots$$

$$P_3(s) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1} s + \bar{a}_{n-2} s^2 + \underline{a}_{n-3} s^3 + \underline{a}_{n-4} s^4 \dots$$

$$P_4(s) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1} s + \bar{a}_{n-2} s^2 + \bar{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-4} s^4 \dots$$

החוקיות של מקדמי ארבעת הפולינומים היא הבאה: שני המקדמים הראשונים בכל פולינום הם ארבעת האפשרויות השונות של שני מקדמי קצה, דהיינו ”גדול-גדול”, ”גדול-קטן”, ”קטן-גדול”,

$$z_{12} = \pm 1.3025 \quad ; \quad z_{34} = \pm j1.5355$$

מעבר לכך, גם לגבי מערכות רציפות בזמן, אם מעוניינים לא רק ביציבות המערכת אלא גם בביצועים שלה, הרי אלה מתבטאים במיקום אפסי הפולינום הקרקטריסטי באזורים שונים של המישור הקומפלכסי כגון סקטור, אליפסה, היפרבולה ואחרים, אשר לא תמיד משפט חריטונוב רלבנטי לגביהם.

ראוי לציין כי שתי הבעיות המפורטות לעיל טופלו ונפתרו במידה רבה. תנאים הכרחיים ומספיקים למיקום אפסי פולינום, שמקדמיו הם פונקציות של פרמטרים אינטרבייליים (ועל כן ישנה תלות בין ערכי המקדמים, ותחום אי הודאות איננו קובייה רב ממדית), באזורים שרירותיים כל שהם של המישור הקומפלכסי (עם מספר הנחות מינוריות), ניתנו ב- [11] – [9]. לא כאן המקום לפרט תוצאות אלו. צריך להשאיר טעם של עוד ... הקורא המעוניין יוכל לעיין במקורות המצוינים מטה.

תודות

ראוי לתת קרדיט לאנשים רבים (סטודנטים, וקולוגות) אשר שתפו איתי פעולה במשך השנים בנושאים הקשורים לכותרת מאמר זה, ופרסמו תוצאות חשובות. אין ביכולתי לפרט את כולם, אולם רשימה חלקית היא הבאה, ואני מקווה שישלחו לי מי שלא הוזכר בה. תרומת כולם, המוזכרים ושאינם מוזכרים, מוערכת מאוד: דר' יוג'ין וולך, דר' דוד הרץ, פרץ לנדאו, פרופ' אילי ג'ורי, פרופ' נירמל בוס, דר' גילה פרוכטר, פרופ' אורי סרברו, דר' אמיר בצר, דר' יהודית הוכרמן-פרומר, פרופ' יעקב קוגן, פרופ' אריה ליזרוביץ, דר' ליאוניד ניימרק, דר' יורי דולגין, דר' ויטלי ספיצה, פרופ' אברהם אלכסנדרוביץ, פרופ' רוברט שורטן.

מקורות

1. C. Hermite, "On the number of roots of an algebraic equation between two limits", in a letter from Hermite to Borchardt, 1856. Translation by P. C. Parks, Int. J. Control, Vol. 26, pp. 183–196, 1977.
2. E. J. Routh, "A treatise on the stability of a given state of motion", Adams Prize Essay, Univ. of Cambridge, England, 1877.
3. A. M. Lyapunov, "The general problem of the stability of motion", Ph.D. thesis, 1892. Translated by A. T. Fuller, Int. J. Control, Vol. 55, pp. 531–773, March, 1992.
4. A. Hurwitz, "Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt", Math. Ann., Vol. 46, pp. 273–284, 1895.
5. I. Schur, "Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, J. für Mathematik, Vol. 47, pp. 205–232, 1917.
6. E. I. Jury, "A simplified stability criterion for linear discrete systems", Univ. of California, Berkeley, ERL Report 373, June 1961.

הפעלת בקרה בחוג סגור, עם משוב בעל הגבר יחידה, על מערכת ספרתית זו (ראה איור), נותנת את פונקציית התמסורת הבאה בחוג סגור:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

$$= \frac{z^4 + 2z^3 + z^2 - 1}{z^4 + (2+a)z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}}$$

ואם נסמן

$$a + 2 = b \quad ; \quad -\frac{17}{8} \leq b \leq \frac{17}{8}$$

אזי הקטבים של פונקציית התמסורת בחוג סגור, הקובעים את יציבות המערכת, ניתנים על ידי אפסי הפולינום

$$z^4 + bz^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3} \quad ; \quad -\frac{17}{8} \leq b \leq \frac{17}{8}$$

במקרה זה "כל" פולינומי הקצה הם רק שני הפולינומים:

$$P_1(z) = z^4 + \frac{17}{8}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_2(z) = z^4 - \frac{17}{8}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}$$

קל לראות שאפסי שני הפולינומים הללו נמצאים כולם בתוך עגול היחידה במישור הקומפלכסי Z . כלומר, המערכת הספרתית שלנו יציבה כאשר הפרמטר a מקבל את ערכי הקצה.

$$a = -\frac{33}{8} \quad ; \quad a = \frac{1}{8}$$

$$b = -\frac{17}{8} \quad ; \quad b = \frac{17}{8}$$

או

אולם, בנגוד למקרה של הצטברות אפסים בחצי המישור הקומפלכסי השמאלי המבטיח יציבות של מערכת רציפה בזמן, שם משפט חריטונוב מבטיח יציבות בכל תחום אי הודאות האינטרביילית אם כל פולינומי הקצה (או "ארבעת המופלאים") יציבים, הרי במקרה שלנו אם a מקבל את הערך

$$a = -\frac{16}{8} = -2 \quad ; \quad b = 0$$

הנמצא באמצע האינטרביל (רחוק ככל האפשר מן הקצוות), מתקבל הפולינום:

$$P_0(z) = z^4 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}$$

קל לראות שלפולינום $P_0(z)$ יש אפסים מחוץ לעגול היחידה, ועל כן המערכת הספרתית שלנו איננה יציבה עבור הערך.

$$a = -2; \quad b = 0$$

למעשה, כל ארבעת אפסי הפולינום $P_0(z)$ נמצאים מחוץ לעגול היחידה, וערכיהם



ד"ר עזרא זאב

- פרופסור אמריטוס בפקולטה להנדסת חשמל
בטכניון, ומחזיק לשעבר בקטדרה להנדסת חשמל
על שם ג'רד סוופ.
- ראש המחלקה להנדסת אלקטרוניקה במכללה
האקדמית להנדסה ירושלים.
- עמית כבוד בהתאגדות מהנדסי חשמל ואלקטרוניקה
בישראל.
- עמית ב IEEE בעבור "תרומות לתיאוריה ולתכן של מערכות
יציבות באופן רובוסטי".
- עמית ב IET (לשעבר IEE).
- יו"ר קבוצת CAS/CS ב-IEEE ישראל ויו"ר לשעבר של IEEE
ישראל.

7. V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", Differential Equations, Vol. 14, pp. 1483–1485, 1979.
8. N. K. Bose and E. Zeheb, "Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters", IEE Proc., Vol. 133, Pt. G, pp. 187–190, August 1986.
9. E. Zeheb, "Necessary and sufficient conditions for root clustering of a polytope of polynomials in a simply connected domain", IEEE Trans. on Automat. Contr., Vol. 34, pp. 986–990, 1989.
10. E. Zeheb, "Necessary and sufficient conditions for robust stability of a continuous system - the continuous dependency case illustrated via multilinear dependency", IEEE Trans. on Circ. And Syst., Vol. CAS 37, No. 1, pp. 47–53, 1990.
11. E. Zeheb, "Necessary and sufficient conditions for robust stability of discrete systems with coefficients depending continuously on two interval parameters", Automatica, Vol. 29, pp. 241–244, 1993.